Taylorrækker og potensrækker

Søren Nørgaard

29. marts 2012

1 Taylorrækker

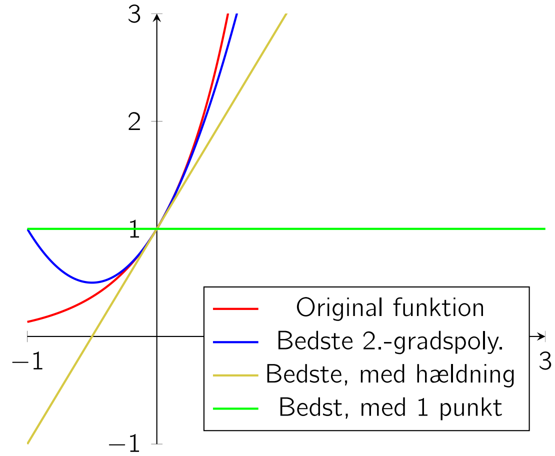
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \quad \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= P_n(x) + \quad R_n(x) \end{aligned}$$

hvis $R_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ så

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} \tag{1}$$

2 Potensrækker

For fastholdt x, kan man fitte et polynomium (Figur 1). Gøres dette uendeligt mange gange, får man en konkret funktion.



Figur 1: Fitting af polynomier til $f(x) = \exp(2x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

for de x hvor rækken konvergerer.

3 muligheder:

1) Absolut konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$

2) Konvergerer kun for $x = 0$

3) Der findes en konvergensradius $R > 0$ så

$$\begin{cases} |x| < R & : \quad \text{Absolut konvergent} \\ |x| > R & : \quad \text{Divergent} \end{cases}$$

3 Potensrækker og differentialligninger

Differentialligning

- Antag at der findes en løsning y, der kan skrives som en konvergent potensrække.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

- Så vil

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) c^{n-2}$$

- Sæt ind i differentialligningen og forsøg at bestemme c_n.