Løsning af inhomogene lineære differentialligninger

Søren Nørgaard, AAU

29. maj 2012

Løsning af differentialligning på følgende form:

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = p(t) \tag{1}$$

Første skridt er at finde den fuldstændige løsning til det *homogene* ligningssystem – højresiden sættes altså lig med 0:

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0 \tag{2}$$

Løsningen til (1) findes ved at lægge en partikulær løsning til (2).

Den partikulære løsning findes ved at gætte på resultatet ud fra $p(t)$. Hvis $p(t)$ er på form som en linje, gættes der på at $f(t)$ er på formen $\alpha t + \beta$. Dette sættes ind:

$$a\,(\alpha t + \beta)'' + b\,(\alpha t + \beta)' + c\,(\alpha t + \beta) = p(t)$$

Dette ganges ud, og leddene sammensættes til eksempeltvis to ligninger.

1 Eksempel

$$f''(t) - 6f'(t) + 10f(t) = 50t - 30 \tag{3}$$

Den homogene løsning til (3) findes til at være

$$f(t) = c_1 \exp(3t)\cos(t) + c_2 \exp(8t)\sin(t) \tag{4}$$

$p(t) = 50t - 30$ ligner en linje. Substituerer $f(t) = \alpha t + \beta$:

$$\begin{aligned}(\alpha t + \beta)'' - 6\,(\alpha t + \beta)' + 10\,(\alpha t + b) &= 50t - 30\\ 10\alpha t + 10\beta - 6\alpha + 0 &= 50t - 30\\ (10\alpha)\,t + (10\beta - 6\alpha) &= 50t - 30\end{aligned}$$

Sammenligning af led giver følgende ligninger:

$$10\alpha = 50 \Leftrightarrow \alpha = 5$$
$$10\beta - 6\alpha = 30 \Leftrightarrow \beta = \frac{-30 + 6\alpha}{10} = 0$$

Det giver den partikulære løsning $f(t) = 5t$. Lægges (4) til denne fås:

$$\boxed{f(t) = 5t + c_1 \exp(3t)\cos(t) + c_2 \exp(8t)\sin(t)} \tag{5}$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige reelle tal.