Konvergens eller divergens for rækker

Søren Nørgaard, AAU

29. maj 2012

1 Kendte rækker

Kendte rækker og deres konvergensforhold.

1.1 Den geometriske række

Række på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \tag{1}$$

Hvis $|r| < 1$ konvergerer rækken mod

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

og divergerer hvis $|r| > 1$ og $a \neq 0$.

1.2 Den harmoniske række

Række på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2}$$

Denne række *divergerer* altid.

1.3 p-rækker

Rækker på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3}$$

konvergerer hvis $p > 1$ og divergerer hvis $0 < p \leq 1$.

1.4 Potensrækker

Række på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

Så gælder det enten at den

- Konvergerer absolut for alle x
- Konvergerer kun for $x = 0$
- Der eksisterer et tal $R > 0$ så $\sum a_n x^n$ konvergerer absolut hvis $|x| < R$ og divergerer hvis $|x| > 0$

I sidste tilfælde vides konvergensforhold ikke hvis $|x| = R$

2 Sammenligningstests

En række kan sammenlignes med en række man kender konvergensforholdet for. Det gælder at:

- $\sum a_n$ konvergerer hvis $\sum b_n$ konvergerer og $a_n \leq b_n$ for alle n.
- $\sum a_n$ divergerer hvis $\sum b_n$ divergerer og $a_n \geq b_n$ for alle n.

2.1 Integraltesten

Antag at $\sum a_n$ er en positiv række og at f er kontinuert for $x \geq 1$. Hvis $f(n) = a_n$ for alle heltal ≥ 1, så enten kon- eller divergerer både:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{og} \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Tilnærmelse af restled

I tilfælde af, at (5) konvergerer, gælder følgende for restleddet, $R_n = S - S_n$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

2.2 Grænseværditesten

Hvis

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \tag{7}$$

eksisterer og $0 < L < +\infty$, så enten kon- eller divergerer begge rækker.

2.3 Brøktesten

Antag at grænsen

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{8}$$

enten eksisterer eller er uendelig. Så gælder følgende for $\sum a_n$ af “nonzero terms”

- Konvergerer absolut hvis $\rho < 1$
- Divergerer hvis $\rho > 1$

Hvis $\rho = 1$, er testen ikke gyldig.

2.4 Rodtesten

Antag at grænsen

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{9}$$

eksisterer eller er uendelig. Så gælder følgende for $\sum a_n$

- Konvergerer absolut hvis $\rho < 1$
- Divergerer hvis $\rho > 1$

Hvis $\rho = 1$ er testen ikke gyldig.

3 Eksempel med større-end-mindre-end-test

Da jeg selv finder denne test svær, kommer her et eksempel.

Følgende rækkes konvergensforhold ønskes bestemt

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{N}}{N\sqrt{N}+7}. \tag{10}$$