Løsning af begyndelsesværdiproblemer og differentialligninger

Søren Nørgaard, AAU

22. maj 2012

Et begyndelsesværdiproblem kunne se således ud

$$\boxed{\begin{aligned} &f''(t) + 4f(x) = 4t \\ &f(0) = 0 \\ &f'(0) = 7 \end{aligned}} \tag{1}$$

Der er 2 måder at løse disse på: Gennem den generelle løsning eller gennem Laplace transformen.

1 Løsning via generel løsning

a) Find den fuldstændige løsning til den homogene ligning

$$f''(t) + 4f(t) = 0$$

b) Find den partikulære løsning til den inhomogene ligning

$$f''(t) + 4f(t) = 4t$$

og opskriv den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning

c) Bestem løsningen til begyndelsesværdiproblemet.

2 Gennem Laplace transformen

a) Vis at den Laplace transformerede af løsningen er givet ved

$$F(s) = \frac{7s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)}$$

b) Find partialbrøksdekompositionen af $F(s)$

c) Find løsningen $f(t)$ ved at invers Laplace Transformere F(s).

Laplacemetoden vil nu blive gennemgået som eksempel.

2.1 Eksempel

a)

$$\begin{aligned} s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + 4F(s) &= 4\frac{1}{s^2} \\ (s^2 + 4)F(s) &= \frac{4}{s^2} + 7 = \frac{7s^2 + 4}{s^2} \\ F(s) &= \frac{7s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

b) Ved at finde rødder i det nederste polynomium, og skrive rødderne som faktorisering, kan man sætte A, B, C og D ind.

$$F(s) = \frac{7s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}$$

Et udtryk kan nu fås ved at gange nævneren fra $F(s)$ over på højre side:

$$\boxed{7s^2 + 4 = As(s^2 + 4) + B(s^2 + 4) + (Cs + D)s^2} \tag{2}$$

Nu skal den inverse Laplace transform findes. Til dette er der to metoder: Find konstanterne en af gangen og gennem et lineært ligningssystem.

2.1.1 Find konstanterne hvert for sig

Advarsel: Denne metode involverer at differentiere udtrykket, hvis der findes en dobbeltrod.

$s = 0$ indsættes:

$$4 = 4B \Leftrightarrow B = 1$$

Da s er en dobbeltrod, må udtrykket (2) differentieres.

$$14s = A(1(s^2+4)+s2s)+B2s+(Cs^2+(Cs+D)2s) \tag{3}$$

$s = 0$ indsættes i (3).

$$0 = 4A \Leftrightarrow A = 0$$

Vi går tilbage til (2) og indsætter $s = 2i$ (som er en kompleks rod).

$$\begin{aligned} 7(-4) + 4 &= (C2i + 0)(-4) \\ -24 + 0i &= -4D - 8Ci \end{aligned}$$

Dette giver 2 ligninger

$$\begin{aligned} -24 &= -4D \Leftrightarrow D = 6 \\ -8C &= 0 \Leftrightarrow C = 0 \end{aligned}$$

Altså

$$F(s) = \frac{7s^2+4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s^2+4} \tag{4}$$

Som nu let løses vha. tabellen

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2} + 3\frac{2}{s^2+4}) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) + 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) \\ &= t + 3\sin 2t \end{aligned}$$

2.1.2 Lineært ligningssystem

Alternativ metode 2 til at bestemme A, B, C og D.

Gang (2) ud:

$$\begin{aligned} 7s^2+4 &= As(s^2+4) + B(s^2+4) + (Cs+D)s^2 \\ &= As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Ds^2 \\ 0s^3 + 7s^2 + 0s + 4 &= (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A)s + 4B \end{aligned}$$

Hvilket giver følgende "koefficienter" til s

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + D &= 7 \\ 4A &= 0 \\ 4B &= 4 \end{aligned}$$

Som kan skrives som en totalmatrix, med A, B, C og D som søjler

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)
t	$\frac{1}{s^2}$	(2)
$t^n \quad n = \text{int}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(3)
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	(4)
$\mathcal{U}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(5)
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	(6)
$\delta(t)$	1	(7)
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	(8)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(9)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(10)
$f^n(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) -$ $\cdots - f^{(n-1)}(0)$	(11)
$\int_0^t f(x) g(t-x) dx$	$F(s)G(s)$	(12)
$t^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(13)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(14)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	(15)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	(16)
e^{at}	$\frac{1}{s-1}$	(17)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	(18)
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	(19)
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	(20)
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	(21)
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	(22)
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(23)
$e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	(24)
$e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	(25)
$e^{at}\sinh kt$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$	(26)
$e^{at}\cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	(27)
$t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	(28)
$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	(29)
$t\sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	(30)
$t\cosh kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$	(31)
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\frac{a}{s}$	(32)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(33)
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(34)
$\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(35)