

## Kvadratisk og kanonisk form – opskrift

Søren Nørgaard

23. april 2013

- Rækkereducering.
- $\Delta$  Determinant
- $\mathbf{U}$  Egenvektorer
- $\mathbf{U}_N$  Egen-enhedsvektor

- $A$  En generel  $n \times n$  kvadratisk matrix.
- $R$  Symmetrisk matrix.
- $D$  Diagonal matrix.
- $E$  Enhedsmatrix.
- $U$  Øvre triangulær matrix.
- $B$  Søjlerne er egenvektorer fra en matrix. Søjler er  $\mathbf{U}$ .
- $B_N$  Søjler er  $\mathbf{U}_N$ .

Tabel 1: Matrix-betegnelser.

### Kanonisk form

1. Bemærk at  $A$  kan skrives som:

$$A = BDB^{-1}$$

2. Den kvadratiske form omskrives:

$$Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T R \mathbf{x}$$

- $R$  har en orthonormal egenbase. Vi finder  $B$  og det er også en  $B_N$  og det betyder at  $B_N^{-1} = B_N^T$ .

3. Omskrivning:

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{x}^T R \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T B_N D B_N^{-1} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^T D \mathbf{y} \end{aligned}$$

Hvor  $\mathbf{y} = B_N^T \mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T B_N$

4. Kanonisk form blivev nu:

$$Q = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

5. Variabel transformation:

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{y} = B_N \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} = B_N^{-1} \mathbf{y} \end{matrix}} \Rightarrow \mathbf{y} = B_N^{-1} \mathbf{x}$$

### Eksempel 4

1. Kvadratisk form:

$$Q = 128 = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2$$

2. Omskrivning til kanonisk form. Vi ser:

$$Q = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 17 & -30 \\ 0 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}$$

3. Egenverdier og -vektorer.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 32 & \quad M_{\lambda_1} = 1 & \quad \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 2 & \quad M_{\lambda_2} = 1 & \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Kanonisk form.

$$Q = 128 = 32y_1^2 + 2y_2^2$$

5. Omskrivning.

$$\begin{aligned} \frac{32}{128} y_1^2 + \frac{2}{128} y_2^2 &= 1 \\ \frac{1}{4} y_1^2 + \frac{1}{64} y_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

6. Dvs. en ellipse med halvaksse:

$$a = \sqrt{4} = 2 \quad b = \sqrt{64} = 8$$

7. Variabeltransformation.

$$\mathbf{y} = B_N^T \mathbf{x} \quad B_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2)$$