Egenværdier og egenvektorer – opskrift

Søren Nørgaard

27. januar 2015

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\
\text{Spor}A &= -7 \\
\Delta A &= 6 \\
n &= 2 : \text{Max to egenværdier.}
\end{aligned}
$$

Karakteristisk matrix

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\
A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
A\mathbf{x} - \lambda I\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
(A - \lambda I)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
M\mathbf{x} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Da M skal være singulær/ikke-invertibel for der er løsninger, søger vi betingelser for $\Delta M = 0$.

Karakteristisk determinant

$$
\begin{aligned}
M = A - \lambda I &= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \\
\Delta M &= (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 2\cdot 2 \\
&= \lambda^2 + \underbrace{7\lambda}_{-\text{Spor}A} + \underbrace{6}_{\Delta A}
\end{aligned}
$$

Karakteristisk ligning/karakterligning

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

Egenværdier

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -6 \end{cases}$$

Algebraisk multiplicitet for begge, er $M_{\lambda 1} = M_{\lambda 2} = 1$.

At finde 3 rødder: Gæt 1 rod/hav en opgivet. Divider (polynomisk) derefter 3. gradspolynomiet med ($\lambda - r_1$), for at få et andengradspolynomium, der let kan løses som ovenfor.

Bemærk at

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 &= -7 = \text{Spor}A \\
\lambda_1\lambda_2 &= 6 = \Delta A
\end{aligned}
$$

Egenvektorer

For $\lambda_1 = -2$:

$$M = A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 2 \\ r = 1 \end{matrix} \quad \text{Rækkereduktion}$$

$$\Rightarrow -4x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{eller} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{eller } U_{N1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{(egenenhedsvektor)}$$

Geometrisk multiplicitet er $m_{\lambda 1} = r - n = 1$.

For $\lambda_2 = -6$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 2 \\ r = 1 \end{matrix}$$

$$x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad U_{N2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometrisk multiplicitet er $m_{\lambda 2} = 1$.

Egenskaber

Det gælder altid at geometrisk multiplicitet, er mindre end eller lig med algebraisk multiplicitet.

$$m_\lambda \leq M_\lambda$$

Egenværdiplacering kan let bestemmes, hvis matricen er ortogonal, symmetrisk eller skæv-symmetrisk.